

## Tartalomjegyzék

<b>1 Valós számokkal végzett műveletek</b> .....	<b>1–4</b>
1.1 Gyökök, hatványok .....	1–2
1.1.1 Hatványok .....	1
1.1.2 Gyökök .....	1–2
1.2 Azonosságok .....	2–3
1.3 Alap egyenlőtlenségek .....	4
<b>2 Függvények</b> .....	<b>2–6</b>
2.1 A függvény fogalma .....	4
2.2 Injektív, szürjektív, bijektív függvények .....	5
2.3 Függvények összetétele .....	5
2.4 Inverz függvény .....	6
<b>3 Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek</b> .....	<b>3–9</b>
3.1 Elsőfokú egyenletek .....	3–8
3.2 Valós szám abszolút értéke .....	8–9
<b>4 Másadfokú függvény</b> .....	<b>10</b>
<b>5 Komplex számok</b> .....	<b>10–14</b>
5.1 Algebrai alak .....	11
5.2 Az $i$ hatványai .....	11
5.3 A $z$ konjugáltja .....	11–12
5.4 Komplex szám abszolút értéke .....	12
5.5 Trigonometriai alak .....	12
5.6 A Moivre-képlet .....	13
5.7 Exponenciális alak .....	13
5.8 Binom egyenlet .....	13–14
<b>6 Haladványok</b> .....	<b>14–15</b>
6.1 Szám-tani haladványok .....	14
6.2 Mértani haladványok .....	14–15
<b>7 Logaritmusok</b> .....	<b>15–18</b>
7.1 Alap logaritmikusság és exponenciális egyenletek .....	17–18
7.2 Alap logaritmikusság és exponenciális egyenlőtlenségek ..	18
<b>8 Analitikus geometria</b> .....	<b>19–20</b>
8.1 A pont .....	19
8.2 Távolság .....	19
8.3 Térgéometria .....	20
8.3.1 A pont .....	20
8.3.2 A sík .....	20
8.3.3 Az egyenes .....	20
8.3.4 Képletek .....	20
<b>9 A matematikai indukció módszere</b> .....	<b>21</b>
9.1 A Peano-féle axiómák .....	21
9.2 A matematikai indukció módszere .....	21
9.3 A matematikai indukció módszerének egy változata ..	21
<b>10 Kombinatorika</b> .....	<b>22–25</b>
10.1 Permutációk .....	22
10.2 Variációk .....	22
10.3 Kombinációk .....	23
10.4 Newton binomiális képlete .....	23–25
10.5 Azonos hatványösszegek .....	25
<b>11 Polinomok</b> .....	<b>25–31</b>
11.1 Algebrai forma .....	26–28

11.2	Polinomok oszthatósága.....	28–29
11.3	Polinomok gyökei.....	29
11.4	Algebrai egyenletek.....	30
11.5	$R, Q, Z$ együtthathós polinomok.....	30–31
11.6	Irreducibilis polinomok.....	31
<b>12</b>	<b>Permutációk, mátrixok, determinánsok.....</b>	<b>32–40</b>
12.1	Permutációk.....	32–33
12.2	Mátrixok.....	33–36
12.3	Determinánsok.....	36–37
12.4	Mátrixok inverze.....	37–40
12.4.1	$\text{Tr}(A)$ .....	37–38
12.4.2	Rang és determináns.....	38–40
<b>13</b>	<b>Lineáris rendszerek.....</b>	<b>40–42</b>
13.1	Jelölések.....	40–41
13.2	Összeférhetőség.....	41–42
13.3	Homogén rendszerek ( $b_i=0$ ).....	42
<b>14</b>	<b>Trigonometria.....</b>	<b>42–45</b>
14.1	Trigonometriai képletek.....	42–45
<b>15</b>	<b>Matematikai analízis.....</b>	<b>45–86</b>
15.1	Rekurziók.....	45–46
15.1.1	Elsőrendű lineáris rekurziók.....	45
15.1.2	Másodrendű lineáris rekurziók.....	45–46
15.2	Sorozathatárérték.....	46–50
15.2.1	Alaphatárértékek, konvergenciakritériumok.....	47–50
15.3	Függvények határértéke.....	50–54
15.4	Folytonos függvények.....	54–58
15.4.1	Tételek folytonosságról.....	55–58
15.5	Deriválható függvények.....	58–63
15.5.1	A deriválhatóság értelmezése egy pontban.....	58–59
15.5.2	Deriválási szabályok.....	59
15.5.3	Elemi függvények deriváltjai.....	60–61
15.5.4	Összetett függvények deriváltjai.....	61–62
15.5.5	Magasabbrendű deriváltak.....	62
15.5.6	Deriválható függvények tulajdonságai.....	63
15.6	Integrál fogalmak.....	63–79
15.6.1	Primitív függvény fogalma.....	63–79
15.7	Határozott integrálok.....	79–84
15.7.1	Értelmezés.....	79
15.7.2	Integrálható függvények tulajdonságai.....	80–81
15.7.3	A fő tétel.....	81–82
15.7.4	Integrál-egyenlőtlenségek.....	82–84
15.8	Kiegészítő tételek.....	84–86
15.8.1	Primitíválható függvények.....	85
15.8.2	Integrálható függvények.....	85–86
<b>16</b>	<b>Algebrai struktúrák.....</b>	<b>86–95</b>
16.1	Csoportok.....	86–89
16.1.1	Tulajdonságok és nevezetes tételek.....	86–89
16.2	Monoidok.....	90
16.3	Gyűrűk.....	90–92
16.4	Testek.....	92–94
16.5	Vektorterek.....	94–95

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:  
[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

$M \times N$ .

4.) *Mátrixok szorzása:*

Legyen  $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$  és  $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$  akkor  $C = A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{C})$ , ahol  $c_{ij} =$

$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \forall (i, j) \in M \times N$  a szorzatuk.

Tulajdonságok:

a.)  $(AB)C = A(BC)$ ;

b.)  $AI_n = I_n A$  ( $A$  semleges elem)  $I_n =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{C});$$

c.)  $(A + B)C = AC + BC$ ;

d.)  $A(B + C) = AB + AC$ .

### 12.3 Determinánssok

A determináns fontos szerepet játszik a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának feltételeinél.

Definíciója első ránézésre bonyolultnak, és

mesterkéltnek tűnhet, de - mint minden-

nek a matematikában - a determináns fogalomnak is megvan a maga szemléletes jelentése.

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C});$$

**Értelmezés 12.7.** Az  $A$  mátrix determinánsán a következő számot értjük:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ , ahol  $A_{ij}$   $a_{ij}$  algebrai komplementuma.

Ha  $C = AB$ , akkor  $\det C = \det A \cdot \det B$  ( $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ ).

Másodrendű determinánssok:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Harmadrendű determinánssok:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

## 12.4 Mátrixok inverze

Legyen  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , ha  $\det A \neq 0$  létezik  $A^{-1} \in M_n(\mathbb{C})$  ú.h.  $AA^{-1} = I_n$ ,  $I_n$  az egységmátrix.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

### 12.4.1 $\text{Tr}(A)$

$$1) \text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B);$$

$$2) \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA);$$

$$3) (A + B)^t = A^t + B^t;$$

$$4) (AB)^t = B^t A^t;$$

$$5) B^2 = B \text{ akkor idempotens } B;$$

$$6) X^2 - (\operatorname{Tr}X)X + (\det X)I_2 = 0_2;$$

$$7) \det A^t = \det A;$$

$$8) \det(A^t + I_n) = \det(A + I_n);$$

$$9) AA^* = A^*A = (\det A)I_n.$$

#### 12.4.2 Rang és determináns

1) Ha az  $A$  mátrix determinánsának kiszámítása során két sort vagy oszlopot felcserélünk a determináns előjelt vált;

2) Ha egy sort megszorozunk  $\alpha$ -val, akkor a determináns értéke szorozódik  $\alpha$ -val;

3) Ha egy determinánsnak két sora vagy oszlopa megegyezik vagy arányosak, akkor a determináns értéke 0;

$$4) A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*;$$

$$5) A + A^t = 0_n \Rightarrow \det A = 0$$

(antiszimmetrikus mátrix);

$$6) \det(a^{-1}) = (\det A)^{-1};$$

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:  
[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

rendszer összeférhető határozatlan ha:

a.)  $r = m < n$ ;

b.)  $r < \min(m, n)$  és  $\text{rang}\bar{A} = \text{rang}A = r$ .

Az (S) rendszer összeférhetetlen ha  $r \leq \min(m, n)$  és  $\text{rang}\bar{A} = r + 1$ .

### 13.3 Homogén rendszerek ( $b_i = 0$ )

1.) **Összeférhető határozottak** ( $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ) dacă  $r = n$

2.) **Összeférhető határozatlan** ha  $r < n$ .

## 14 Trigonometria

### 14.1 Trigonometriai képletek

1)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ;

2)  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;

3)  $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ ;

4)  $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ;

5)  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ;

6)  $\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ;

7)  $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ;

8)  $\tan x > x > \sin x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;

9)  $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) -$

$$- \sin(x) \sin(y);$$

$$10) \sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x);$$

$$11) \tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)};$$

$$12) \cot(x + y) = \frac{\cot(x) \cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)};$$

$$13) \sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \sin(y) \cos(x);$$

$$14) \cos(x - y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y);$$

$$15) \tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)};$$

$$16) \cot(x - y) = \frac{\cot(x) \cot(y) + 1}{\cot(y) - \cot(x)};$$

$$17) \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x);$$

$$18) \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1;$$

$$19) \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x;$$

$$20) \cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x);$$

$$21) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}};$$

$$22) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}};$$

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:  
[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

2) Ha  $(a_n)$  egy alulról korlátos sorozat, és csökkenő akkor  $a_n$  konvergens.

**Tétel 15.2.** Ha  $x_n$  egy pozitív valós számsorozat amelyre  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$ .

1) Ha  $\ell < 1$ , akkor  $x_n$  konvergens, és  $\lim x_n = 0$ .

2) Ha  $\ell > 1$ , akkor  $x_n$  divergens és  $\lim x_n = \infty$ .

3) Ha  $\ell < 1$ , akkor  $y_n = \sum_{j=1}^n x_j$  konvergens.

4) Ha  $\ell > 1$ , akkor  $y_n$  divergens.

### 15.2.1 Alaphatárértékek, konvergencia kritériumok

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ;

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ ;

4) Legyen  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , és  $\bar{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Akkor  $e_n \leq e_{n+1}$ , és  $\bar{e}_n \geq \bar{e}_{n+1}$ ;

5)  $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$ ;

6)  $c_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$  konvergens és a határértéke  $c$ , amit Euler-féle állandónak nevezünk;

7) Ha  $\lim x_n = \infty$  akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ ;

8) Ha  $\lim x_n = 0$  akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e;$$

9) Ha  $\lim x_n = 0$  akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a;$$

9') Ha  $\lim x_n = 0$  akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1;$$

10)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} \right) = \frac{1}{e}$

11) (Cesaro-Stolz)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}, \text{ ha } b_n$$

monoton és nem korlátos

12) Ha  $\lim x_n = \ell$ , akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \ell;$$

13) Ha  $\lim x_n = \ell$ , akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \ell;$$

14) (Cauchy-D'Alembert) Ha létezik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}, \text{ akkor}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:  
[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

### 15.5.3 Elemi függvények deriváltjai

$$1) f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0;$$

$$2) f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1};$$

$$3) f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1};$$

$$4) f(x) = \sqrt{x}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$5) f(x) = \ln(x), x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x};$$

$$6) f(x) = a^x, a \neq 1, a > 0, x > 0 \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a);$$

$$7) f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x;$$

$$8) f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x);$$

$$9) f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x);$$

$$10) f(x) = \tan(x), x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)};$$

$$11) f(x) = \cot(x), x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)};$$

$$12) f(x) = \arcsin(x), x \in [0, 1] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$13) f(x) = \arccos(x), x \in [0, 1] \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$$

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:  
[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

$a < a_3$  következik, hogy  $\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \leq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(a_3) - f(a)}{a_3 - a}$ ;

### 15.8.1 Primitiválható függvények

1) Ha  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek van primitívje és  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos akkor  $fg$ -nek is van primitívje.

2) Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a < c < b$ ) van primitíve  $[a, c]$  és  $[c, b]$ -n akkor  $f$  primitiválható  $[a, b]$ -n.

3) Ha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  primitiválható,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deriválható, folytonos a  $g'$ -t,  $g(x) \neq 0$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy primitívje  $g$ -nek akkor  $f \circ h$  primitiválható.

4) Ha

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ f_2, & x \in [a, b] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

primitiválható

akkor  $f_1 = f_2$  és folytonosak.

### 15.8.2 Integrálható függvények

1) Az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrálható akkor és csak akkor ha megszámlálható pontok halmaza megszámlálható.

2) Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrálható akkor akkor integrálható a  $[c, d] \subseteq [a, b]$ ,

3) Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton akkor integrálható.

4) Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrálható és Darboux-tulajdonságú akkor  $\exists c \in (a, b) :$   
 $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$

5) Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrálható, akkor  $\exists c \in (a, b) :$   
 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$

## 16 Algebrai struktúrák

### 16.1 Csoportok

Egy  $(G, \circ)$  párt, mely egy nem üres  $G$  halmazból és egy  $\circ : G \times G \rightarrow G$  belső műveletből áll **csoportnak** nevezünk ha teljesülnek az alábbiak:

Zárság axiómája:  $\forall x, y \in G \Rightarrow x \circ y \in G.$

Asszociativitás:  $\forall x, y, z \in G, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

Semleges elem :  $\exists e \in G$  úgy, hogy  $e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in G$

Inverz elem :  $\forall x \in G$  estén létezik  $y \in G$  azzal a tulajdonsággal, hogy  $x \circ y = y \circ x = e.$

Ha teljesül a kommutativitás is, vagyis:  $\forall x, y \in G, x \circ y = y \circ x,$  akkor a  $(G, \circ)$  csoportot kommutatív vagy Abel-csoportnak nevezünk.

#### 16.1.1 Tulajdonságok és nevezetes tételek

**Tétel 16.1.** (A Lorenz-csoport)

Legyenek  $a > 0, G = (-a, a), x \circ y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}.$  Ekkor a  $(G, \circ)$  egy Abel-csoport.

**Tétel 16.2.** Legyen  $(G, \circ)$  egy csoport és  $H \subset G.$  Ha  $H \neq \emptyset$  és bármely  $x, y \in$

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:  
[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)

[www.erettsegi-puskak.ro](http://www.erettsegi-puskak.ro)