Tartalomjegyzék

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:
www.erettsegi-puskak.ro

www.erettsegi-puskak.ro

MxN.

4.) Mátrixok szorzása:
Legyen $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ és $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ akkor $C = A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{C})$, ahol $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \forall (i,j) \in MxN$ a szorzatuk.
Tulajdonságok:
a.) $(AB)C = A(BC)$;
b.) $AI_n = I_n A$ (A semleges elem) $I_n =$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{C});$$
c.) $(A+B)C = AC + BC$;
d.) $A(B+C) = AB + AC$.

12.3 Determinánsok

A determináns fontos szerepet játszik a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának feltételeinél. Definíciója első ránézésre bonyolultnak, és mesterkéltnek tűnhet, de - mint mindennek a matematikában - a determináns fogalomnak is megvan a maga szemléletes jelentése.
Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C});$$

Értelmezés 12.7. *Az A mátrix determinánsán a következő számot értjük:*

www.eretsegi-puska.ro

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(a)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$, *ahol* A_{ij} a_{ij} *algebrai komplementuma.*

Ha $C = AB$, *akkor* $\det C = \det A \cdot \det B (A, B, C \in M_n(\mathbb{C}))$.

Másodrendű determinánsok:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Harmadrendű determinánsok:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$.

12.4 Mátrixok inverze

Legyen $A \in M_n(\mathbb{C})$, *ha* $\det A \neq 0$ *létezik* $A^{-1} \in M_n(\mathbb{C})$ *ú.h.* $AA^{-1} = I_n$, I_n *az egységmátrix.*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

12.4.1 $\mathrm{Tr}(A)$

1) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$;

2) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$;

3) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

4) $(AB)^t = B^t A^t$;

5) $B^2 = B$ *akkor idempotens* B ;

6) $X^2 - (\mathrm{Tr}X)X + (\det X)I_2 = 0_2$;

7) $\det A^t = \det A$;

8) $\det(A^t + I_n) = \det(A + I_n)$;

9) $AA^* = A^*A = (\det A)I_n$.

12.4.2 Rang és determináns

1) Ha az A mátrix determinánsának kiszámítása során két sort vagy oszlopot felcserélünk a determináns előjelt vált;

2) Ha egy sort megszorzunk α*-val, akkor a determináns értéke szorzódik* α*-val;*

3) Ha egy determinánsnak két sora vagy oszlopa megegyezik vagy arányosak, akkor a determináns értéke 0;

4) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$;

5) $A + A^t = 0_n \Rightarrow \det A = 0$ *(antiszimmetrikus mátrix);*

6) $\det(a^{-1}) = (\det A)^{-1}$;

www.erettsegi.puskak.ro

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:
www.erettsegi-puskak.ro

www.erettsegi-puskak.ro

rendszer ***összeférhető határozatlan*** *ha:*
a.) $r = m < n$;
b.) $r < min(m, n)$ *és* $rang\overline{A} = rangA = r$.
Az (S) *rendszer* ***összeférhetetlen*** *ha* $r \leq min(m, n)$ *és* $rang\overline{A} = r + 1$.

13.3 Homogén rendszerek ($b_i = 0$)

1.) ***Összeférhető határozottak*** $(x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)$ *dacă* $r = n$

*2.)**Összeférhető határozatlan*** *ha* $r < n$.

14 Trigonometria

14.1 Trigonometriai képletek

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

3) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$;

4) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

5) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

6) $\tan x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

7) $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

8) $\tan x > x > \sin x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

9) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) -$

www.erettsegi-puskak.ro

$-\sin(x)\sin(y)$;

10) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) +$
$+\sin(y)\cos(x)$;

11) $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$;

12) $\cot(x+y) = \frac{\cot(x)\cot(y)-1}{\cot(x)+\cot(y)}$;

13) $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) -$
$-\sin(y)\cos(x)$;

14) $\cos(x-y) = \cos(x)\cdot\cos(y) + \sin(x)\cdot$
$\sin(y)$;

15) $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$;

16) $\cot(x-y) = \frac{\cot(x)\cot(y)+1}{\cot(y)-\cot(y)}$;

17) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$;

18) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 -$
$2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$;

19) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$;

20) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$;

21) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$;

22) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$;

www.erettsegipuskak.ro

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:
www.erettsegi-puskak.ro

www.erettsegi-puskak.ro

2)Ha (a_n) egy alulról korlátos sorozat, és csökkenő akkor a_n konvergens.

Tétel 15.2. *Ha x_n egy pozitív valós számsorozat amelyre $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$.*
1) Ha $\ell < 1$, akkor x_n konvergens, és $\lim x_n = 0$.
2) Ha $\ell > 1$, akkor x_n divergens és $\lim x_n = \infty$.
3) Ha $\ell < 1$, akkor $y_n = \Sigma_{j=1}^{n} x_n$ konvergens.
4) Ha $\ell > 1$, akkor y_n divergens.

15.2.1 Alaphatárértékek, konvergencia kritériumok

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

2) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$;

3)$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$;

4) Legyen $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, és $\tilde{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Akkor $e_n \le e_{n+1}$, és $\tilde{e}_n \ge \tilde{e}_{n+1}$;

5) $\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n}, \forall n \ge 1$;

6) $c_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ konvergens és a határértéke c, amit Euler-féle állandónak nevezünk;

7) Ha $\lim x_n = \infty$ akkor $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$;

www.erettsegi-puskak.ro

8) Ha $\lim x_n = 0$ *akkor*
$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$;

9) Ha $\lim x_n = 0$ *akkor*
$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a$;

9') Ha $\lim x_n = 0$ *akkor*
$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$;

10) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{e}$

11) (Cesaro-Stolz) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, *ha* b_n *monoton és nem korlátos*

12) Ha $\lim x_n = \ell$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \ell;$$

13) Ha $\lim x_n = \ell$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \ell;$$

14) (Cauchy-D'Alambert) Ha létezik $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

www.erettsegi.puskak.ro

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:
www.erettsegi-puskak.ro

www.erettsegi-puskak.ro

15.5.3 Elemi függvények deriváltjai

1) $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0;$

2) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1};$

3) $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1};$

4) $f(x) = \sqrt{x}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

5) $f(x) = \ln(x), x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x};$

6) $f(x) = a^x, a \neq 1, a > 0, x > 0 \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a);$

7) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x;$

8) $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x);$

9) $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x);$

10) $f(x) = \tan(x), x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)};$

11) $f(x) = \cot(x), x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)};$

12) $f(x) = \arcsin(x), x \in [0, 1] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

13) $f(x) = \arccos(x), x \in [0, 1] \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$

www.erettsegi.puskak.ro

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:
www.erettsegi-puskak.ro

www.erettsegi-puskak.ro

$a < a_3$ *következik, hogy* $\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1} \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(a_3)-f(a)}{a_3-a}$;

15.8.1 Primitiválható függvények

1)Ha $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ *függvénynek van primitívje és* $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *folytonos akkor* fg*-nek is van primitívje.*

2) Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (a < c < b)$ *van primitíve* $[a, c]$ *és* $[c, b]$*-n akkor* f *primitiválható* $[a, b]$*-n.*

3)Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *primitiválható,* $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *deriválható, folytonos a* g'*-t,* $g(x) \neq 0$*,* $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *egy primitívje* g*-nek akkor* $f \circ h$ *primitiválható.*

4) Ha

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ f_2, x \in [a, b] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

primitiválható
akkor $f_1 = f_2$ *és folytonosak.*

15.8.2 Integrálható függvények

1) Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *integrálható akkor és csak akkor ha megszámlálható pontok halmaza megszámlálható.*

2) Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *integrálható akkor akkor integrálható a* $[c, d] \subseteq [a, b]$*,*

3) Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *monoton akkor integrálható.*

www.erettsegi-puskak.ro

4) Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható és Darboux-tulajdonságú akkor $\exists c \in (a, b)$: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$

5) Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor $\exists c \in (a, b)$: $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$.

16 Algebrai struktúrák

16.1 Csoportok

Egy $(G, \circ)$ párt, mely egy nem üres G halmazból és egy $\circ : G \times G \to G$ belső műveletből áll ***csoportnak*** *nevezünk ha teljesülnek az alábbiak:*

Zárság axiómája: $\forall x, y \in G \Rightarrow x \circ y \in G$.

Asszociativitás: $\forall x, y, z \in G$, $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

Semleges elem : $\exists e \in G$ úgy, hogy $e \circ x = x \circ e = x$, $\forall x \in G$

Inverz elem : $\forall x \in G$ estén létezik $y \in G$ azzal a tulajdonsággal, hogy $x \circ y = y \circ x = e$.

Ha teljesül a kommutativitás is, vagyis: $\forall x, y \in G$, $x \circ y = y \circ x$, akkor a $(G, \circ)$ csoportot kommutatív vagy Abel-csoportnak nevezünk.

16.1.1 Tulajdonságok és nevezetes tételek

Tétel 16.1. *(A Lorenz-csoport) Legyenek $a > 0$, $G = (-a, a)$, $x \circ y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{a^2}}$. Ekkor a $(G, \circ)$ egy Abel-csoport.*

Tétel 16.2. *Legyen $(G, \circ)$ egy csoport és $H \subset G$. Ha $H \neq \emptyset$ és bármely $x, y \in$*

www.ereteszegi-buskak.ro

Rendeld meg a teljes, nyomtatott verziót innen:
www.erettsegi-puskak.ro

www.erettsegi-puskak.ro